

# ĐỘNG LỰC HỌC TAY MÁY CÓ KHE HỖ KHỚP ĐỘNG DYNAMIC ANALYSIS OF AN INDUSTRIAL MANIPULATOR WITH REVOLUTE CLEARANCE JOINTS

Vũ Đức Bình<sup>1)</sup> Đỗ Đăng Khoa<sup>2)</sup> Phan Đăng Phong<sup>3)</sup> Đỗ Sanh<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Trường Đại học Công nghiệp Việt Trì  
Số 9 Tiên Sơn, Tiên Cát, Việt Trì, Phú Thọ  
Email: vubinh@vui.edu.vn

<sup>2)</sup> Viện Cơ khí, Đại học Bách Khoa Hà Nội  
Số 1 Đại Cồ Việt, Hai Bà Trưng, Hà Nội.  
Email: khoadodang.vn@gmail.com

<sup>3)</sup> Viện Nghiên cứu Cơ khí  
Số 4, Phạm Văn Đồng  
Email: phongpd@narime.gov.vn

**Báo cáo tóm tắt:** Đối với các tay máy chuyển động chương trình, thí dụ, trong công nghiệp (các tay máy bốc xếp, sơn, hàn...), các tay máy y tế (phục vụ phẫu thuật)... yêu cầu chặt chẽ về các sai lệch đối với thao tác. Điều này yêu cầu khá cao đối với khe hở tại các khớp (xảy ra có thể do chế tạo, do mài mòn,...).

Trong báo cáo dựa trên Nguyên lý Phù hợp và phương pháp ma trận truyền, thiết lập phương trình chuyển động cho các tay máy phẳng gồm chuỗi các khâu được nối với nhau bằng các khớp quay khi tồn tại khe hở tại các khớp quay. Từ đó có thể xác định các sai số khi vận hành các tay máy.

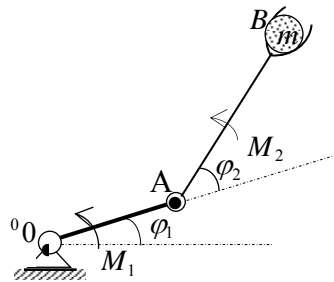
**Từ khóa:** Nguyên lý Phù hợp, Tiêu chuẩn về tính lý tưởng, Phương pháp ma trận truyền

**Abstract:** Industrial Manipulators that are subject to program motions in many applications such as cargo unloading, spray painting, welding or surgery usually request high-accuracy manipulation. Accordingly, it is required that the clearances of their revolute joints, which often exist due to imperfect manufacturing process or friction wear, must be accounted for the manipulator control. In the paper, the principle of Compatibility and the method of transmission matrix are applied to develop the equations of motion of a manipulator with a revolute clearance joint. Thus, the position error of the manipulator's tool tip can be estimated.

**Keyword:** Principle of Compatibility, Ideal Constraint Conditions, Method of Transmission Matrix

## 1. Mô hình khảo sát

Việc tồn tại các khe hở trong các khớp nối do chế tạo hay do bị mài mòn trong quá trình làm việc không những làm sai lệch các kết quả



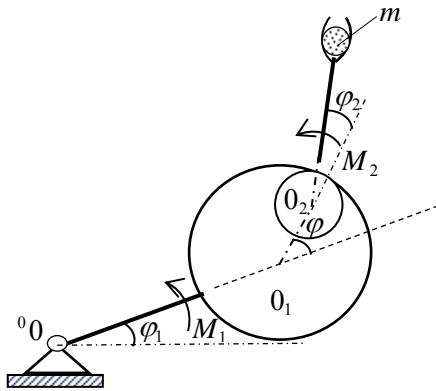
Hình 1. Mô hình tay máy công nghiệp

nhận được của hoạt động của tay máy mà còn xảy ra hiện tượng va đập. Điều này được đặc biệt lưu ý trong các tay máy y tế. Trong báo cáo xây dựng mô hình tay máy công nghiệp gồm các khâu phẳng nối nhau bằng các khớp quay giữa hai khâu<sup>0</sup>OA và AB (Hình 1). Xét trường hợp các tâm trục của chúng không trùng nhau và

cách nhau một khoảng  $\Delta = r_1 - r_2$  trong đó các  $r_1, r_2$  tương ứng là các đường kính bên trong và bên ngoài của các vòng lăn khớp nối giữa hai khâu (Hình 2). Giả thiết không có va đập và hai đường tròn này lăn không trượt đối với nhau. Tay máy gồm hai khâu, khối lượng và mô men quán tính các khâu lần lượt là  $m_1, m_2, J_1, J_2$ , khối tâm của chúng nằm trên đường tâm và cách trục quay riêng các khoảng  $c_1, c_2$ , có chiều dài tương ứng bằng  $l_1, l_2$  chuyển động trong mặt phẳng đứng. Giả thiết khâu OA được cân bằng tĩnh ( $c_1 = 0$ ). Tại đầu mút khâu thứ hai mang vật nặng, được xem là chất điểm, có tọa độ  $l_2$ , có khối lượng  $m$ . Chuyển động của tay máy dưới tác dụng các ngẫu lực có mômen  $M_1 = M_0 \sin(2\pi t); M_2 = M_0 \cos(2\pi t)$

## 2. Phương trình chuyển động của tay máy

Tay máy được mô hình trong dạng hai khâu, vị trí của chúng được xác định nhờ 4 tọa độ  $\varphi_1, \varphi, \varphi_2, u$ , trong đó  $\varphi_1, \varphi_2$  là hai góc định vị của hai khâu tay máy,  $u = \overline{0_1 0_2}$  - khoảng cách hai tâm  $0_1, 0_2$  tay máy,  $\varphi$  - góc nghiêng của  $\overline{0_1 0_2}$  đối với phương ngang.

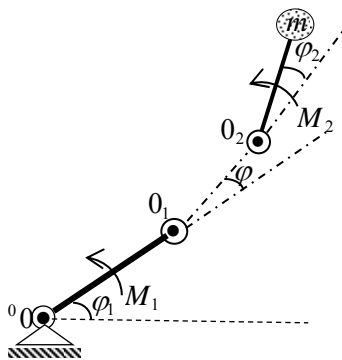


Hình 2. Mô hình khảo sát

Vị trí cơ hệ được xác định nhờ 4 tọa độ  $(\varphi_1, \varphi, u, \varphi_2)$ . Chuyển động của tay máy bị ràng buộc bởi hai điều kiện. Đó là hai vòng tròn luôn tiếp xúc với nhau (khoảng cách giữa 2 tâm luôn không đổi và bằng  $r_1 - r_2$ ) và lăn không trượt đối với nhau. Hệ chịu hai phương trình liên kết dạng:

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv u - (r_1 - r_2) = 0 \\ f_2 &\equiv r_1 \varphi + r_2 \varphi_2 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Khi  $u = r_1 - r_2$  hai khâu không rời nhau, không xảy ra va chạm. Xét trường hợp 2 khâu luôn tiếp xúc. Hệ có hai bậc tự do



Hình 3. Mô hình tính toán

Để thiết lập phương trình chuyển động của tay máy ta sử dụng phương trình chuyển động dạng

$$A\ddot{q} = Q^{(1)} + Q^{(2)} - Q^{(3)} + R \quad (2)$$

Trong đó  $A$ - ma trận quán tính, là ma trận vuông, không suy biến, cỡ  $(4 \times 4)$ ;  $Q^{(1)}$ -ma trận  $(4 \times 1)$ -ma trận của các lực suy rộng có thế và không có thế;  $Q^{(2)}, Q^{(3)}$  được tính từ ma trận quán tính;  $R$ -ma trận của các lực suy rộng của các phản lực liên kết của các liên kết (1). Trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Để tính các yếu tố của ma trận quán tính ta sử dụng phương pháp ma trận truyền [1-10]. Nhằm mục đích này ta viết các ma trận truyền sau;

$$t_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; t_2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & l_1 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$t_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; t_4 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$t_{11} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 & 0 \\ \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; t_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$t_{21} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & l_1 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; r_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; r_2 = \begin{bmatrix} c_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$t_{41} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_2 & -\cos \varphi_2 & 0 \\ \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; r = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Các yếu tố của ma trận quán tính  $A$  được tính theo các công thức sau:

$$a_{11} = m_2 r_2^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{11} t_2 t_3 t_4 r_2 + m r^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{11} t_2 t_3 t_4 r + J_1 + J_2;$$

$$a_{12} = m_2 r_2^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{11} t_2 t_3 t_4 r_2 + m r^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{11} t_2 t_3 t_4 r;$$

$$a_{13} = m_2 r_2^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{11} t_2 t_3 r_2 + m r^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{11} t_2 t_3 t_4 r;$$

$$a_{14} = m_2 r_2^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{11} t_2 t_3 t_4 r_2 + m r^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{11} t_2 t_3 t_4 r + J_2;$$

$$a_{22} = m_2 r_2^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{21} t_2 t_3 t_4 r_2 + m r^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{21} t_2 t_3 t_4 r;$$

$$a_{23} = m_2 r_2^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{21} t_2 t_3 t_4 r_2 + m r^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{21} t_2 t_3 t_4 r;$$

$$a_{24} = m_2 r_2^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{21} t_2 t_3 t_4 r_2 + m r^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{21} t_2 t_3 t_4 r;$$

$$a_{33} = m_2 r_2^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{31} t_2 t_3 t_4 r_2 + m r^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{31} t_2 t_3 t_4 r;$$

$$a_{34} = m_2 r_2^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{31} t_2 t_3 t_4 r_2 + m r^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{31} t_2 t_3 t_4 r;$$

$$a_{44} = m_2 r_2^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{41} t_2 t_3 t_4 r_2 + m r^T t_4^T t_3^T t_2^T t_1^T t_{41} t_2 t_3 t_4 r + J_2;$$

Sau khi thực hiện các phép tính ta nhận được:

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 c_1^2 + m_2 (c_2^2 + l_1^2 + u^2 + 2c_2 l_1 \cos(\varphi + \varphi_2) \\ &\quad + 2c_2 u \cos \varphi_2 + 2l_1 u \cos \varphi) + m(l_1^2 + l_2^2 + u^2 \\ &\quad + 2l_1 l_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + 2u(l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \varphi_2) \\ &\quad + J_1 + J_2); \\ a_{12} &= m_2 (c_2^2 + u^2 + c_2 l_1 \cos(\varphi + \varphi_2) + 2c_2 u \cos \varphi_2 \\ &\quad + l_1 u \cos \varphi) + m(l_2^2 + u^2 + l_1 l_2 \cos(\varphi + \varphi_2) \\ &\quad + u(l_1 \cos \varphi + 2l_2 \cos \varphi_2)); \\ a_{13} &= m_2 (l_1 \sin \varphi - c_2 \sin \varphi_2) + m(l_1 \sin \varphi - l_2 \sin \varphi_2); \\ a_{14} &= m_2 (c_2^2 + c_2 l_1 \cos(\varphi + \varphi_2) + c_2 u \cos \varphi_2) + \\ &\quad m l_2 (l_2 + l_1 \cos(\varphi + \varphi_2) + l_2 \cos \varphi_2) + J_2; \\ a_{22} &= m_2 (c_2^2 + u^2 + 2c_2 u \cos \varphi_2) \\ &\quad + m(l_2^2 + u^2 + 2l_2 u \cos \varphi_2); \\ a_{23} &= -(m_2 c_2 + m l_2) \sin \varphi_2; \\ a_{24} &= m_2 (c_2^2 + c_2 u \cos \varphi_2) + m(l_2^2 + u l_2 \cos \varphi_2); \\ a_{33} &= m_2 + m; a_{34} = -(m_2 c_2 + m l_2) \sin \varphi_2 \\ a_{44} &= m c_2^2 + m l_2^2 + J_2; \end{aligned}$$

Để tính các đại lượng  $\mathbf{Q}^{(2)}, \mathbf{Q}^{(3)}$  trong phương trình (2) ta tính các ma trận sau [1-3]:

$$\partial_i \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{14}}{\partial q_i} \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{24}}{\partial q_i} \\ \frac{\partial a_{14}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{24}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{44}}{\partial q_i} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Trong đó  $q_i$  lần lượt được lấy là  $\varphi_1, \varphi, u, \varphi_2$ , tức ta nhận được các ma trận cỡ  $(4 \times 4)$ :

$$\partial_{\varphi_1} \mathbf{A}, \partial_{\varphi} \mathbf{A}, \partial_u \mathbf{A}, \partial_{\varphi_2} \mathbf{A} \quad (6)$$

Thêm vào ta thiết lập các ma trận sau:

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi} \quad \dot{u} \quad \dot{\varphi}_2]^T \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = \dot{\mathbf{q}} \dot{\varphi}_1; \dot{\mathbf{q}}_2 = \dot{\mathbf{q}} \dot{\varphi}_2; \dot{\mathbf{q}}_3 = \dot{\mathbf{q}} \dot{u}; \dot{\mathbf{q}}_4 = \dot{\mathbf{q}} \dot{\varphi}_2$$

Đại lượng  $\mathbf{Q}^{(2)}$  là ma trận cỡ  $(4 \times 1)$ , trong đó các yếu tố của nó được tính theo công thức;

$$\begin{aligned} Q_1^{(2)} &= 0.5 \dot{\mathbf{q}} \partial_{\varphi_1} \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}^T; Q_2^{(2)} = 0.5 \dot{\mathbf{q}} \partial_{\varphi} \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}^T; \\ Q_3^{(2)} &= 0.5 \dot{\mathbf{q}} \partial_u \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}^T; Q_4^{(2)} = 0.5 \dot{\mathbf{q}} \partial_{\varphi_2} \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}^T \end{aligned} \quad (8)$$

Đại lượng  $\mathbf{Q}^{(3)} = \sum_{i=1}^4 \partial_i \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}_i$  được tính theo công thức

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1^{(3)} &= \partial_{\varphi_1} \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}_1^T; \mathbf{Q}_2^{(3)} = \partial_{\varphi} \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}_2^T; \\ \mathbf{Q}_3^{(3)} &= \partial_u \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}_3^T; \mathbf{Q}_4^{(3)} = \partial_{\varphi_2} \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}_4^T \end{aligned} \quad (9)$$

Vì các yếu tố  $a_{ij}$  của ma trận quán tính không chứa các tọa độ  $\varphi_1$  nên đại lượng  $\partial_{\varphi_1} \mathbf{A} \equiv 0$  nên

$$\mathbf{Q}_1^{(2)} = 0; \mathbf{Q}_1^{(3)} = 0$$

Hàm thế năng có dạng sau:

$$\begin{aligned} \pi &= mg(l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi + \varphi_2) + u \sin(\varphi_1 + \varphi) + l_1 \sin \varphi_1) \\ &\quad + m_1 g c_1 \sin \varphi_1 + m_2 g (l_1 \sin \varphi_1 + u \sin(\varphi_1 + \varphi) \\ &\quad + c_2 \sin(\varphi_1 + \varphi + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Lực suy rộng của các lực có thế và không thế có biểu thức sau

$$\begin{aligned} Q_1^{(1)} &= M_1 + M_2 - mg(l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi + \varphi_2) \\ &\quad + u \cos(\varphi_1 + \varphi)) - m_1 g c_1 \cos \varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 \\ &\quad + u \cos(\varphi_1 + \varphi) + c_2 \cos(\varphi_1 + \varphi + \varphi_2)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2^{(1)} &= M_2 - mg(l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi + \varphi_2) + u \cos(\varphi_1 + \varphi) \\ &\quad - m_2 g (u \cos(\varphi_1 + \varphi) + c_2 \cos(\varphi_1 + \varphi + \varphi_2)); \end{aligned}$$

$$Q_3^{(1)} = -(m_2 + m) g \sin(\varphi_1 + \varphi);$$

$$Q_4^{(1)} = M_2 - (m_2 c_2 + m l_2) g \sin(\varphi_1 + \varphi + \varphi_2) \quad (10)$$

Trong phương trình (2),  $\mathbf{R}$  là ma trận của các phản lực liên kết từ các liên kết (1) ứng với các tọa độ suy rộng  $((\varphi_1, \varphi, u, \varphi_2))$ . Đó là ma trận cỡ  $(4 \times 1)$ :

$$\mathbf{R} = [R_{\varphi_1} \quad R_{\varphi} \quad R_u \quad R_{\varphi_2}] \quad (11)$$

Liên kết (2) được giả thiết là lý tưởng. Như đã biết, điều kiện lý tưởng của liên kết được viết trong dạng dạng sau [4,7]:

$$\mathbf{D}\mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (12)$$

Ma trận  $(2 \times 4)$   $\mathbf{D}$  có dạng sau [1,2]

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad k = \frac{r_2}{r_1} \leq 1 \quad (13)$$

Phương trình vi phân chuyển động của tay máy có dạng sau:

$$\mathbf{D}\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{D}(\mathbf{Q}^{(1)} + \mathbf{Q}^{(2)} - \mathbf{Q}^{(3)}) \quad (14)$$

Hệ phương trình (14) và các phương trình liên kết (1) mô tả chuyển động của tay máy. Nói cách khác, từ các phương trình này với điều kiện đầu cho:

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_{10}, \dot{\varphi}_1(t_0) = \dot{\varphi}_{10}; \varphi(t_0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0;$$

$$u(t_0) = u_0, \dot{u}(t_0) = \dot{u}_0, \varphi_2(t_0) = \varphi_{20}, \dot{\varphi}_2(t_0) = \dot{\varphi}_{20};$$

Từ các phương trình này ta tính được:

$$\varphi_1(t), \varphi(t), u(t), \varphi_2(t)$$

**Chú ý:** Vì các liên kết (2) là hõlônôm nên từ đó có thể tính  $u, \varphi$  là hàm của  $\varphi_1, \varphi_2$  và thay chúng vào phương trình (14), ta nhận được hai phương trình vi phân cấp hai đóng kín đối với hai biến  $\varphi_1, \varphi_2$  và do đó có thể tính trực tiếp hai biến  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ . Nói một cách khác chuyển động của tay máy có thể nhận được từ việc giải hệ 4 phương trình (14) và (12), nhưng cũng có thể chỉ

nhờ hệ 2 phương trình (14), trong đó các biến  $u, \varphi$  và các đạo hàm của chúng được thay biểu thức của chúng khi giải hệ phương trình (12) hoặc thậm chí nhờ phương trình (14) và một số các phương trình liên kết với điều kiện nhờ hệ phương trình liên kết các phương trình (14) trở thành hệ phương trình đóng kín. Chú ý điều này chỉ đúng đối với trường hợp các liên kết hình học và các liên kết động học khả tích.

Trong trường hợp khi khi vòng tròn tâm  $O_1, O_2$  luôn tiếp xúc thì hai tâm luôn cách nhau một khoảng không đổi, tức  $u = \Delta = r_1 - r_2 = const$  và khâu AB lăn không trượt đối với khâu OA. Trong trường hợp này trong các đại lượng đã tính toán ta lấy:

$$u = \Delta, \dot{u} = 0, \ddot{u} = 0 \quad (15)$$

Phương trình chuyển động của tay máy được mô tả bởi các phương trình (14) và phương trình

$$u - \Delta = 0; \quad (16)$$

$$f_1 \equiv r_1 \varphi + r_2 \varphi_2 = 0 \quad (17)$$

trong đó chuyển động tay máy phải thỏa mãn đồng thời các phương trình (14) tiếp nhận các phương trình (16), (17). Nói một cách khác các phương trình (16), (17) cần được xem là các tích phân đầu của cơ hệ [5,11].

Như vậy chuyển động của tay máy được mô tả bởi hệ 4 phương trình vi phân cấp hai nhờ 4 tọa độ suy rộng  $(\varphi_1, \varphi, u, \varphi_2)$ . Cụ thể chuyển động tay máy được mô tả bởi hai phương trình vi phân cấp hai (14) và hai phương trình:

$$\ddot{u} = 0; \quad (18)$$

$$r_1 \ddot{\varphi} + r_2 \ddot{\varphi}_2 = 0$$

Chú ý rằng hệ phương trình mô tả chuyển động của tay máy được thiết lập từ 4 phương trình vi phân cấp hai đóng kín đối với các biến pha. Nói cách khác có thể sử dụng các phương pháp xử lý hệ phương trình vi phân thường cho bài toán được đề cập, trong khi để xử lý bài toán này hiện nay hoặc phải sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange hoặc phương pháp giải phương trình vi phân đại số. Trong báo cáo này sử dụng phương pháp được đưa ra trong [11]. Cụ thể ta phải giải hệ phương trình sau:

Phương trình động lực của tay máy (phương trình(14));

Phương trình 1:

$$\begin{aligned} & [m_1 c_1^2 + m_2 (c_2^2 + l_1^2 + u^2 + 2c_2 l_1 \cos(\varphi + \varphi_2)) \\ & + 2c_2 u \cos \varphi_2 + 2l_1 u \cos \varphi] + m(l_1^2 + l_2^2 + u^2 \\ & + 2l_1 l_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + 2u(l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \varphi_2) \\ & + J_1 + J_2) \ddot{\varphi}_1 + [m_2 (c_2^2 + u^2 + c_2 l_1 \cos(\varphi + \varphi_2)) \\ & + 2c_2 u \cos \varphi_2 + l_1 u \cos \varphi] + m(l_2^2 + u^2 \\ & + l_1 l_2 \cos(\varphi + \varphi_2) + u(l_1 \cos \varphi + 2l_2 \cos \varphi_2) \ddot{\varphi} \\ & + [m_2 (l_1 \sin \varphi - c_2 \sin \varphi_2) + m(l_1 \sin \varphi - l_2 \sin \varphi_2)] \ddot{u} \\ & + [m_2 c_2 (c_2 + l_1 \cos(\varphi + \varphi_2) + u \cos \varphi_2) + \\ & m l_2 (l_2 + l_1 \cos(\varphi + \varphi_2) + l_2 \cos \varphi_2) + J_2] \ddot{\varphi}_2; \\ & + u(l_1 \cos \varphi + 2l_2 \cos \varphi_2)] - M_1 - M_2 + \\ & mg(l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi + \varphi_2) - u \cos(\varphi_1 + \varphi)) \\ & + m_1 g c_1 \cos \varphi_1 + m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 - u \cos(\varphi_1 + \varphi) \\ & - c_2 \cos(\varphi_1 + \varphi + \varphi_2)) + 2[l_1 (c_2 m_2 + l_2 m) \\ & \sin(\varphi + \varphi_2) + u l_1 (m_2 + m) \sin \varphi] \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 \\ & - 2[(l_1 \cos \varphi + u)(m_2 + m) + (m_2 c_2 + m l_2) \cos \varphi_2] \dot{u} \dot{\varphi} \\ & + 2[(c_2 m_2 + l_2 m)(l_1 \sin(\varphi + \varphi_2) + u \sin \varphi_2)] \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 = 0; \end{aligned}$$

Phương trình 2:

$$\begin{aligned} r_1 \{ & [m_2 (c_2^2 + u^2 + c_2 l_1 \cos(\varphi + \varphi_2) + 2c_2 u \cos \varphi_2 \\ & + l_1 u \cos \varphi) + m(l_2^2 + u^2 + l_1 l_2 \cos(\varphi + \varphi_2) \\ & + u(l_1 \cos \varphi + 2l_2 \cos \varphi_2)] \ddot{\varphi}_1 \\ & + [m_2 (c_2^2 + u^2 + 2c_2 u \cos \varphi_2) + m(l_2^2 + u^2 \\ & + 2l_2 u \cos \varphi_2)] \ddot{\varphi} - [(m_2 c_2 + m l_2) \sin \varphi_2] \ddot{u} + \\ & [m_2 (c_2^2 + c_2 u \cos \varphi_2) + m(l_2^2 + u^2 + 2l_2 u \cos \varphi_2)] \ddot{\varphi}_2 \\ & - M_2 - mg(l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi + \varphi_2) + u \cos(\varphi_1 + \varphi) \\ & - m_2 g(u \cos(\varphi_1 + \varphi) + c_2 \cos(\varphi_1 + \varphi + \varphi_2)) \} \\ & + r_2 \{ [m_2 (c_2^2 + c_2 l_1 \cos(\varphi + \varphi_2) + c_2 u \cos \varphi_2) + \\ & m l_2 (l_2 + l_1 \cos(\varphi + \varphi_2) + u \cos \varphi_2) + J_2] \ddot{\varphi}_1 + \\ & [m_2 (c_2^2 + c_2 u \cos \varphi_2) + m(l_2^2 + u^2 + 2c_2 u \cos \varphi_2)] \ddot{\varphi} \\ & - (m_2 c_2 + m l_2) \sin \varphi_2 \ddot{u} + (m c_2^2 + m l_2^2 + J_2) \ddot{\varphi}_2 - M_2 \\ & + (m_2 c_2 + m l_2) g \sin(\varphi_1 + \varphi + \varphi_2) - \\ & 2r_2 (c_2 m_2 + l_2 m) \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - 2r_2 (c_2 m_2 + l_2 m) \\ & u \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 \} = 0; \end{aligned}$$

Phương trình 3

$$\ddot{u} = 0;$$

Phương trình 4:

$$r_1 \ddot{\varphi} + r_2 \ddot{\varphi}_2 = 0;$$

Nghiệm của hệ 4 phương trình được thiết lập cùng với điều kiện đầu cho sẽ mô tả chuyển động tay máy.

### 3. Độ sai lệch của chuyển động chương trình của tay máy

Từ mô hình khảo sát có thể khảo sát các sai lệch khi tay máy cần thực hiện chuyển động chương trình

a) Trong trường hợp các khớp không có khe hở, khi đó ta có:  $\Delta = 0, \varphi = 0$ , điểm M (tay nắm) thực hiện chuyển động có các tọa độ

$$x_M = l_2 \cos[\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] + l_1 \cos \varphi_2(t);$$

$$y_M = l_2 \sin[\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] + l_1 \sin \varphi_2(t);$$

b) Trong trường hợp giữa hai khâu có khe hở và vẫn tiếp xúc nhau thì tọa độ điểm M sẽ là:

$$x_M = l_2 \cos(\varphi_1(t) + \varphi(t) + \varphi_2(t)) + \Delta \cos(\varphi_1(t) + \varphi(t)) + l_1 \cos \varphi_1(t),$$

$$y_M = l_2 \sin(\varphi_1(t) + \varphi(t) + \varphi_2(t)) + \Delta \sin(\varphi_1(t) + \varphi(t)) + l_1 \sin(\varphi(t));$$

Như vậy có thể tính được sai lệch chuyển động chương trình theo  $\Delta$  và điều quan trọng có thể từ sai lệch để chẩn đoán độ lệch tâm  $\Delta$

c) Trong trường hợp hai khâu nối nhau không còn tiếp xúc tay máy trở thành hệ 4 bậc tự do: khâu quay OA và khâu song phẳng AB. Trong trường hợp như vậy hai khâu không còn tiếp xúc và có thể xảy ra va chạm. Để tránh va chạm cần điều khiển hai khâu không rời nhau. Điều này yêu cầu phân lực, ít nhất phân lực pháp tại điểm tiếp xúc tồn tại. Trong trường hợp này cần xác định phân lực pháp tại điểm tiếp xúc giữa hai khâu

#### 4. Phản lực

Việc tồn tại khe hở của khớp nối có thể xảy ra va đập khi mất tiếp xúc giữa hai khâu. Hiện tượng này xảy ra khi phân lực pháp tuyến tại điểm tiếp xúc bằng không

Liên quan đến hiện tượng này ta xác định phân lực pháp tuyến tại điểm tiếp xúc. Vì rằng để có tiếp xúc thì duy trì điều kiện:

$$u = 0$$

Khi tồn tại điều kiện này đồng nghĩa với điều kiện  $R_u \neq 0$ . Điều kiện này đảm bảo hai khâu không rời nhau, tức còn tiếp xúc.

Để xác định phân lực tiếp xúc  $R_u$  ta quay lại phương trình (2), trong đó các tọa độ vận tốc và gia tốc đã tính được hàm theo thời gian nhờ hệ phương trình (17),(20),(21). Cụ thể phân lực  $R_u$  được tính như sau:

$$R_u = a_{13} \ddot{\varphi}_1(t) + a_{23} \ddot{\varphi}(t) + a_{34} \ddot{\varphi}_2(t) - Q_3^{(1)}(t) - Q_3^{(2)}(t) + Q_3^{(3)}(t)$$

Với các thông số của mô hình được khảo sát, ta nhận được:

$$\begin{aligned} R_u = & [m_2(l_1 \sin \varphi - c_2 \sin \varphi_2) \\ & + m(l_1 \sin \varphi - l_2 \sin \varphi_2)] \ddot{\varphi}_1 + (m_2 c_2 + m l_2) \sin \varphi_2 \ddot{\varphi} \\ & - (m_2 c_2 + m l_2) \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_2 + m) g \sin(\varphi_1 + \varphi) \\ & - [(m_2 + m)(\Delta + l_1 \cos \varphi) + (c_2 m_2 + m l_2) \cos \varphi_2] \dot{\varphi}_1^2 \\ & - [(m_2 + m)(\Delta + l_1 \cos \varphi) + (m_2 c_2 + m l_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi} \\ & - 0.5(m_2 c_2 + m l_2) \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - [(m_2 + m)(\Delta \\ & + 0.5 l_1 \cos \varphi) + (m_2 c_2 + m l_2) \cos \varphi_2] \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi} \\ & - [(m_2 + m) \Delta + (m_2 c_2 + m l_2) \cos \varphi_2] \dot{\varphi}_2^2 \\ & - 0.5(m_2 c_2 + m l_2) \cos \varphi_2 \dot{\varphi} \dot{\varphi}_2 + (m_2 + m) \cos \varphi \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi} \\ & - [(m_2 c_2 + m l_2) \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + (m_2 c_2 + m l_2) \cos \varphi \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \\ & + (m_2 c_2 + m l_2) \dot{\varphi}_2^2]; \end{aligned}$$

Vế phải là các hàm đã tính được của thời gian. Từ biểu thức giá trị hàm  $R_u$  khảo sát điều kiện không xảy ra va đập:

$$R_u \neq 0$$

Từ đây so sánh với kết quả từ chuyển động tay máy sẽ tính được sai số xảy ra. Các kết quả được cho qua việc tính với các số liệu sau:

$$M_1 = M_0 \sin \omega t; M_2 = M_0 \cos \omega t$$

$$l_1 = 1.25(m); l_2 = 0.5(m); m = 1(kg); m_2 = 0.5(kg);$$

$$J_1 = J_2 = 0.1(kgm^2); r_1 = 0.0025(m); g = 10m/s^2;$$

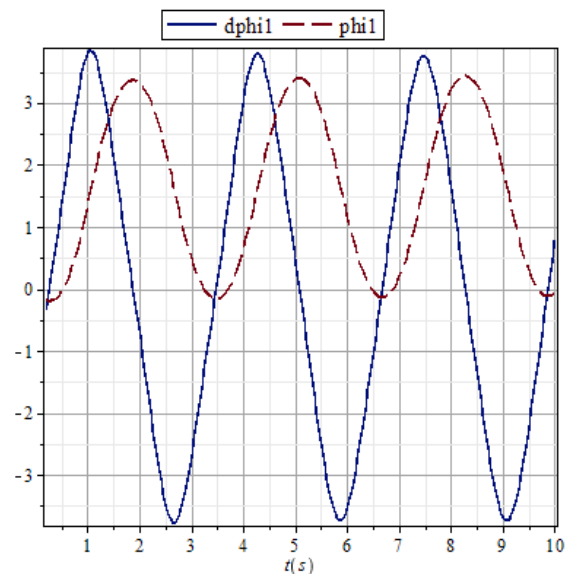
$$r_2 = 0.00245(m); \Delta = 0.005(m); c_2 = 0.2(m); c_1 = 0;$$

$$M_0 = -1(Nm); \omega = 2\pi rad/sec$$

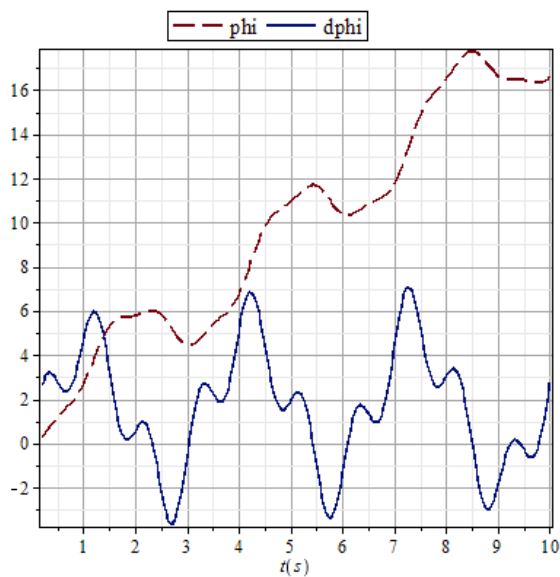
Điều kiện đầu:

$$\varphi_1(0) = 0; \varphi(0) = 0, u(0) = 0.005; \varphi_2(0) = 0;$$

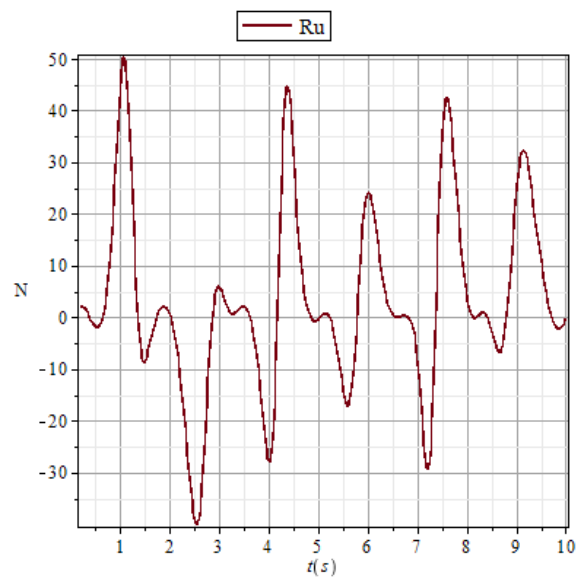
$$\dot{\varphi}_1(0) = -1.5 rad/s; \dot{\varphi}(0) = 0, \dot{u}(0) = 0; \dot{\varphi}_2(0) = 0;$$



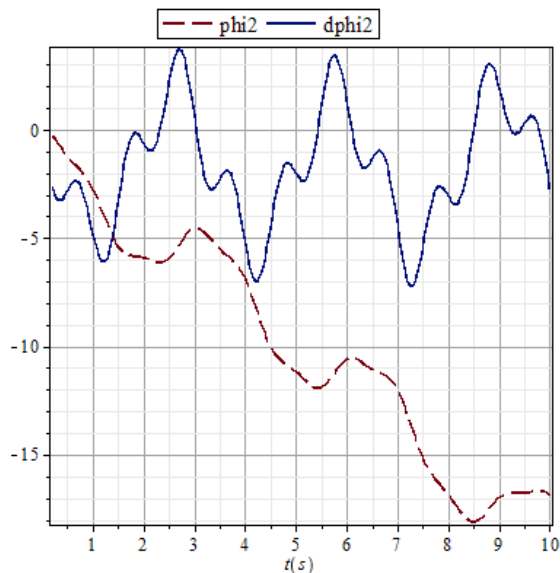
Hình 4: Đồ thị góc quay  $\varphi_1$  và vận tốc góc  $\dot{\varphi}_1$



Hình 5: Đồ thị góc quay  $\varphi$  và vận tốc góc  $\dot{\varphi}$



Hình 7: Đồ thị phản lực  $R_u$



Hình 6: Đồ thị góc quay  $\varphi_2$  và vận tốc góc  $\dot{\varphi}_2$

## 5. Kết luận

Vấn đề khe hở tại các khớp đang được quan tâm không chỉ từ quan điểm độ bền mà còn quan trọng đối với độ chính xác. Trong bài báo đã xây dựng mô hình khảo sát một cơ hệ chịu liên kết mà việc thực hiện liên kết sẽ đảm bảo điều kiện không xảy ra va đập. Với mô hình được đề xuất rất thuận lợi cho việc áp dụng phương pháp ma trận truyền

Đã xây dựng lộ trình khảo sát theo 2 bước:

Bước 1: Tìm chuyển động cơ hệ khi không có va đập, tức quá trình chuyển động đảm bảo sự tiếp xúc. Trong bước này áp dụng nguyên lý phù hợp và thực hiện điều kiện lý tưởng của liên kết tiếp xúc.

Bước 2: Sử dụng nguyên lý phù hợp để xác định phản lực liên kết, thiết lập điều kiện đảm bảo tiếp xúc, nhờ đó kiểm tra điều kiện không xảy ra va đập

Phương pháp đã trình bày không chỉ cho phép tính sai lệch khi điều khiển chuyển động chương trình các tay máy công nghiệp, mà còn giúp chẩn đoán các tình huống động lực có thể xảy ra.

Phương pháp đề xuất có thể dễ dàng mở rộng cho các hệ phức tạp.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Sanh Do, Khoa Do Dang (2010), Method of Transmission of Motion of Planar Mechanisms Machine Dynamics Research, Vol. 34. No 4
- [2] Đỗ Sanh, Đỗ Đăng Khoa (2014), Điều khiển các hệ động lực\_ Điều khiển chuyển động chương trình, Điều khiển tối ưu, NXB Bách khoa, Hà nội
- [3] Đỗ Sanh (2008), Cơ học kỹ thuật ,Tập hai, Động lực học, NXB Giáo dục
- [4] Đỗ Sanh, Đỗ Đăng Khoa (2004), Khảo sát điều kiện tiếp xúc của máy rung loại hành tinh, Động lực học kỹ thuật, Tập 1, Tuyển tập các báo cáo Hội nghị Cơ

học Toàn quốc kỷ niệm 25 năm thành lập Viện Cơ học, Hà nội, tr.391-398

[5] Do Sanh (1984), On the Motion of Controlled Systems, Advance in Mechanics, Tom 7, Vol.2., Varsaw

[6] Đỗ Sanh (1984), Chuyển động của các cơ hệ chịu ràng buộc. Luận án TSKH, Đại học Bách Khoa Hà nội

[7] Đỗ Sanh, Nguyễn Chí Sáng, Phan Đăng Phong, Vũ Đức Bình (2012), Khảo sát bài toán điều khiển tối ưu chuyển động chương trình của tay máy công nghiệp, Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học Toàn quốc lần thứ 9, Tập 1, Động lực học và Điều khiển, Hà nội ,tr.501-510

[8] Đỗ Sanh, Đinh Văn Phong, Nguyễn Trọng Thuần, Đỗ Đăng Khoa (2002), Khảo sát động lực học của các rô bốt công nghiệp, Tuyển tập Hội nghị Cơ học Toàn quốc lần thứ VII, Tập 1, tr, 282-289

[9] Đỗ Sanh, Đinh Văn Phong, Đỗ Đăng Khoa (2004), Problem of Optimal Control of Program Motion of Mechanicaj Systems, The 8th International on Mechatronics Technology, Hanoi, Vietnam, November 27/5/2004 .pp.315-321

[10] Sanh Do, Phong Dinh Van, Khoa Do Dang, Duc Tran (2015), A Method for Solving the Motion Equations of Constrained Systems, APVC 2015, The 16th Asian Pacific Vibration Conference, November 24-26, 2016, Hanoi, Vietnam.