

## Động lực học cơ hệ với ma sát Cu lông

**Đỗ Đăng Khoa<sup>1,\*</sup>, Phan Đăng Phong<sup>2</sup>, Đỗ Sanh<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

<sup>2</sup>Viện Nghiên cứu Cơ khí

<sup>3</sup>Hội Cơ học VN

\*Email: khoa.dodang@hust.edu.vn

**Tóm tắt.** Ma sát Cu lông là vấn đề quan trọng đối với chuyển động máy vì không những làm hao mòn các chi tiết máy mà chủ yếu gây khó khăn cho chuyển động của máy, đặc biệt là hiện tượng kẹt máy. Các liên kết có ma sát là những liên kết không lý tưởng, loại liên kết mà cho đến thời điểm này chưa có phương thức tổng quát xử lý. Trong báo cáo đã đề xuất phương pháp xử lý: đưa phản lực liên kết (phản lực tiếp tuyến và phản lực pháp tuyến) vào phương trình chuyển động và sử dụng tính lý tưởng của phản lực pháp tuyến để loại trừ nó còn các phản lực tiếp tuyến thuộc loại lực tác dụng. Nhờ phương pháp này việc viết phương trình chuyển động của hệ chịu liên kết sẽ không chứa các nhân tử Lagrange. Bằng cách như vậy có thể coi phương trình nhận được cùng phương trình liên kết là phương trình chuyển động của cơ hệ. Tuy nhiên trong các phương trình này còn chứa đại lượng chưa biết là phản lực tiếp tuyến. Để nhận được phương trình mô tả hoàn toàn chuyển động cơ hệ đã sử dụng giả thiết về tính chất của phản lực tiếp tuyến, trong trường hợp này là lực ma sát. Sử dụng định luật Cu lông về ma sát trượt để mô tả tính chất vật lý của phản lực tiếp tuyến và nhờ đó bài toán được giải quyết: nhận được phương trình mô tả chuyển động của cơ hệ. Phương pháp được đề xuất có thể áp dụng cho trường hợp tổng quát khi dựa vào thực nghiệm nhận được quy luật vật lý về phản lực tiếp tuyến.

*Từ khóa:* Ma sát Cu lông, Phản lực pháp tuyến, Phản lực tiếp tuyến, Điều kiện lý tưởng

### 1. Mở đầu

Liên kết với ma sát thuộc loại liên kết không lý tưởng [1, 2, 3]. Mặc dù vấn đề này được quan tâm rất sớm nhưng cho đến nay chưa có một phương pháp cơ học để khảo sát chuyển động của các hệ với loại liên kết này vì phản lực liên kết phụ thuộc vào tính chất vật lý của tiếp xúc. Nói một cách khác cần bổ sung định luật vật lý của phản lực liên kết. Với ý tưởng này phân tích phản lực thành phản lực pháp tuyến và phản lực tiếp tuyến, trong đó phản lực pháp tuyến được xem là lý tưởng, còn phản lực tiếp tuyến thuộc lực hoạt động. Vì cơ hệ có liên kết nên tồn tại các phương trình liên kết do không thể chọn tọa độ độc lập. Để tránh khó khăn khi thành lập phương trình chuyển động dạng nhân tử (loại phương trình phổ biến hiện nay cho các cơ hệ chịu liên kết mà không loại trừ được bằng cách chọn các tọa độ độc lập), bài báo sử dụng phương trình đề xuất (khử nhân tử). Tuy nhiên phương trình nhận được còn chứa lực chưa biết là phản lực tiếp tuyến. Việc sử dụng định luật Cu lông về ma sát không cùng với phương trình nhận được và phương trình liên kết đã giải quyết bài toán đặt ra: mô tả chuyển động cơ hệ với liên kết đối với trường hợp ma sát Cu lông.

### 2. Khảo sát chuyển động của cơ hệ với ma sát

Khảo sát cơ hệ gồm  $N$  chất điểm  $M_k$ , vị trí của nó được xác định bởi các tọa độ  $x_k, y_k, z_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) chịu liên kết ma sát [4, 5, 6, 7]:

$$f_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{3N}) = 0 \quad (1)$$

Phương trình chuyển động cơ hệ được viết trong dạng:

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k + \vec{F}_k^{ms} + \vec{N}_k \quad (k = \overline{1, N}) \quad (2)$$

Trong đó:  $\vec{N}_k$  - phản lực pháp tuyến tác dụng lên chất điểm  $M_k$ ,  $\vec{F}_k^{ms}$  - lực ma sát Cu lông nó được xác định từ biểu thức:

$$\vec{F}_k^{ms} = -f_k |\vec{N}_k| \text{signum}\left(\frac{\vec{v}_k}{|\vec{v}_k|}\right) \quad (3)$$

Trong tọa độ suy rộng dư ( $q_j; j = \overline{1, m}$ ), phương trình chuyển động của cơ hệ có dạng [8, 9, 10]:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{qt} + \mathbf{Q}^{(N)} + \mathbf{Q}^{(\vec{F}^{ms})} \quad (4)$$

Trong đó  $\mathbf{Q}$  - lực suy rộng của lực hoạt động,  $\mathbf{Q}^{qt} = \mathbf{Q}^0 - \mathbf{Q}^*$  - lực suy rộng của các lực quán tính, chúng được xác định từ ma trận quán tính  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Q}^{(N)}$ ,  $\mathbf{Q}^{(\vec{F}^{ms})}$  tương ứng là lực suy rộng của các phản lực pháp tuyến và lực ma sát, chúng có biểu thức:

$$\mathbf{Q}^{(N)} = \sum_{k=1}^{3N} \vec{N}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}; \mathbf{Q}^{(\vec{F}^{ms})} = \sum_{k=1}^{3N} \vec{F}_k^{ms} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}; \quad (5)$$

Do tổng công của các phản lực pháp tuyến trong mọi di chuyển ảo có công triệt tiêu nên:

$$\mathbf{DQ}^{(N)} = \mathbf{0} \quad (6)$$

Còn ma trận  $\mathbf{D}$  được xác định dựa vào hệ phương trình liên kết. Để nhận được ma trận  $\mathbf{D}$ , ta viết phương trình liên kết trong dạng tuyến tính đối với gia tốc suy rộng:

$$\sum_{j=1}^m f_\alpha(q_j, \dot{q}_j) \ddot{q}_j + f_\alpha^0 = 0 \quad (7)$$

Từ đây tính được biểu thức các gia tốc theo các gia tốc độc lập:

$$\ddot{q}_j = \sum d_{j\sigma} \ddot{q}_\sigma + d_j; \quad j = \overline{1, m} \quad (8)$$

Ma trận  $\mathbf{D}$  cỡ  $k \times m$  sẽ có các yếu tố là  $d_{\sigma j}$  ( $j = \overline{1, m}, \sigma = \overline{1, k} = m - s$ ). Phương trình liên kết dạng (1) có thể được viết trong dạng ma trận:

$$\mathbf{f} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad (9)$$

Trong đó  $\mathbf{f}$  - ma trận cỡ (sxm), còn  $\mathbf{f}_0$  - ma trận cột cỡ (mx1). Dựa vào (6) ta nhận được:

$$\mathbf{DA}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{DQ} + \mathbf{DQ}^{qt} + \mathbf{DQ}^{(\vec{F}^{ms})} \quad (10)$$

Trong trường hợp cơ hệ chịu liên kết lý tưởng (tức liên kết (1) là lý tưởng), như đã biết [8, 9] chuyển động cơ hệ được mô tả bằng hệ phương trình (7) và phương trình:

$$\mathbf{DA}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{DQ} + \mathbf{DQ}^{qt} \quad (11)$$

Tuy nhiên trong trường hợp liên kết (1) có ma sát, nên liên kết là không lý tưởng, hệ phương trình (9), (10) là hệ phương trình chưa đầy đủ do xuất hiện các lực ma sát. Để mô tả chuyển động cơ hệ trong trường hợp này (trường hợp liên kết không lý tưởng) cần thiết lập các điều kiện bổ sung từ giả thiết ma sát thỏa mãn định luật ma sát Cu lông. Cho mục đích này có thể thực hiện như sau:

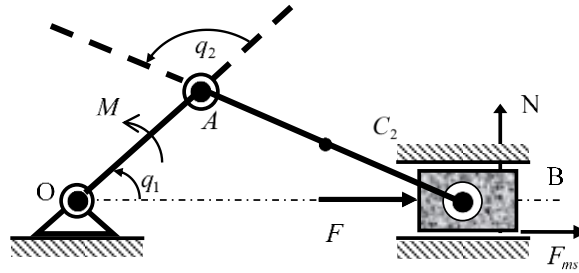
Đầu tiên từ (3) và (4) tính các lực  $\vec{F}_k^k$  và tiếp thay kết quả nhận được vào (10), nó cùng với (9) cho một hệ đầy đủ để xác định chuyển động của hệ chịu liên kết có ma sát.

Tiếp theo tách vật và sử dụng định luật ma sát Cu lông để tính lực ma sát chỉ liên quan đến các yếu tố động lực tác dụng lên cơ hệ cùng trạng thái chuyển động cơ hệ (gia tốc, vận tốc, tọa độ) trong đó đã loại trừ các phản lực pháp tuyến và thay chúng vào (10).

Trong cách như vậy chuyển động cơ hệ với liên kết không lý tưởng được mô tả bởi hệ phương trình (9), (10) và điều kiện bổ sung được thành lập (11).

### 3. Khảo sát động lực học của cơ cấu tay quay con trượt

Để minh họa phương pháp được đề xuất khảo sát chuyển động của cơ cấu tay quay con trượt gồm tay quay có chiều dài  $l_1$  được cân bằng tĩnh và mô men quán tính đối với trục quay là  $J_1$  thanh truyền có chiều dài  $l_2$ , khối lượng  $m_2$ , khối tâm  $C_2$  ( $AC_2=c_2$ ) mô men quán tính đối với khối tâm bằng  $J_2$ , con trượt có khối lượng  $m_3$  chịu tác dụng lực  $F$  ngược với chiều chuyển động của con trượt và chịu tác dụng lực ma sát trượt Coulomb. Tay quay chịu tác dụng ngẫu lực  $M$  (Hình 1).



Hình 1. Cơ cấu tay quay con trượt

Đầu tiên tính ma trận quán tính **A**. Cấu hình được xác định bởi các tọa độ  $q_1, q_2$  Sử dụng phương pháp ma trận truyền ta thiết lập các ma trận sau [10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{t}_{11} &= \begin{bmatrix} -\sin q_1 & -\cos q_1 & 0 \\ \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{t}_{21} = \begin{bmatrix} -\sin q_1 & -\cos q_2 & 0 \\ \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

Vị trí khối tâm  $C_2$  và khối tâm con trượt B được xác định bởi các ma trận :

$$\mathbf{r}_c = [-c_2 \ 0 \ 1]^T ; \quad \mathbf{r}_B = [-l_2 \ 0 \ 1]^T \quad (13)$$

Ở đây ký hiệu T ở góc cao nhất bên phải là phép tính chuyển vị. Các yếu tố ma trận quán tính được tính như sau:

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_2 \mathbf{r}_2^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{t}_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{t}_2 \mathbf{r} + J_1 + J_2 = m_2 (c_2^2 + l_2^2 - 2l_1 c_2 \cos q_2) \\ &\quad + m_3 (l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos q_2) + J_1 + J_2; \\ a_{12} &= m_2 \mathbf{r}_2^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{t}_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{t}_2 \mathbf{r} + J_2 = m_2 (c_2^2 - c_2 l_1 \cos q_2) + m_3 (l_2^2 - l_1 l_2 \cos q_2) + J_3; \\ a_{22} &= m_2 c_2 l_1 + m_3 l_2^2 + J_2 \end{aligned} \quad (14)$$

Để tính lực suy rộng của các lực quán tính, ta sử dụng các công thức:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^0 &= \begin{bmatrix} Q_1^0 \\ Q_2^0 \end{bmatrix}; \quad Q_1^0 = \frac{1}{2}[\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2] \partial_1 \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}; \quad Q_2^0 = \frac{1}{2}[\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2] \partial_2 \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{Q}_1^{(*)} &= \partial_1 A \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{bmatrix} = 0; \quad \mathbf{Q}_2^* = \partial_2 A \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_2 c_2 + m_3 l_2) l_1 \sin q_2 (\dot{q}_1^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2) \\ (m_2 c_2 + m_3 l_2) l_2 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\
\partial_1 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_1} \end{bmatrix} = 0; \quad \partial_2 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(m_2 c_2 + m_3 l_2) l_1 \sin q_2 & (m_2 c_2 + m_3 l_2) l_1 \sin q_2 \\ (m_2 c_2 + m_3 l_2) l_1 \sin q_2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{15}$$

Do đó lực suy rộng của các lực quán tính có biểu thức:

$$\mathbf{Q}^{qt} = \mathbf{Q}^0 - \mathbf{Q}^* \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ (m_2 c_2 + m_3 l_2) l_1 \sin q_2 \dot{q}_1^2 + (m_2 c_2 + m_3 l_2) l_2 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q}^* &= \mathbf{Q}_1^* + \mathbf{Q}_2^* = \begin{bmatrix} (m_2 c_2 + m_3 l_2) l_1 \sin q_2 (\dot{q}_1^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2) \\ (m_2 c_2 + m_3 l_2) l_2 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{Q}^{qt} &= \mathbf{Q}^0 - \mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} -(m_2 c_2 + m_3 l_2) l_1 \sin q_2 (\dot{q}_1^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2) \\ (m_2 c_2 + m_3 l_2) l_1 \sin q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{17}$$

Thế năng của cơ hệ:

$$\pi = m_2 g (l_1 \sin q_1 - c_2 \sin(q_1 + q_2)) \tag{18}$$

Để tính lực suy rộng của lực ma sát và phản lực pháp tuyến ta dựa vào biểu thức công ảo của các lực ma sát và phản lực pháp tuyến:

$$\sum \delta A_k = -F_{ms} \delta x_B = -F_{ms} (l_2 \sin(q_1 + q_2) - l_1 \sin q_1) \delta q_1 - F_{ms} l_2 \sin(q_1 + q_2) \delta q_2 \tag{19}$$

Từ đây tính được lực suy rộng của các lực ma sát:

$$Q_1^{ms} = -F_{ms} (l_2 \sin(q_1 + q_2) - l_1 \sin q_1); \quad Q_2^{ms} = -F_{ms} l_2 \sin(q_1 + q_2) \tag{20}$$

$$\partial_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_1} \end{bmatrix} = 0; \quad \partial_2 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(m_2 c_2 + m_3 l_2) l_1 \sin q_2 & (m_2 c_2 + m_3 l_2) l_1 \sin q_2 \\ (m_2 c_2 + m_3 l_2) l_1 \sin q_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Hệ chỉ có một bậc tự do, nên phương trình liên kết có dạng:

$$f \equiv l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) = 0; \tag{22}$$

Phương trình liên kết có thể được viết trong các dạng tương đương:

$$f_1 \equiv (l_1 \cos q_1 - l_2 \cos(q_1 + q_2)) \dot{q}_1 - l_2 \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_2 = 0 \tag{23}$$

Ma trận  $\mathbf{D}$  cỡ (1x2) ứng với liên kết ràng buộc cơ hệ được khảo sát có dạng:

$$\mathbf{D} = [1 \quad d_{12}]; \quad d_{12} = \frac{l_1 \cos q_1}{l_2 \cos(q_1 + q_2)} - 1 \tag{24}$$

Phương trình (10) được viết như sau:

$$(a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 - Q_1) + d_{12}(a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 - Q_2) = 0 \quad (25)$$

Trong đó:

$$Q_1 = -\frac{\partial \pi}{\partial q_1} + M - \alpha q_1 + Q_1^{qt} + Q_1^{ms}; \quad (26)$$

$$Q_2 = -\frac{\partial \pi}{\partial q_2} - F + Q_2^{qt} + Q_2^{ms}$$

Với:

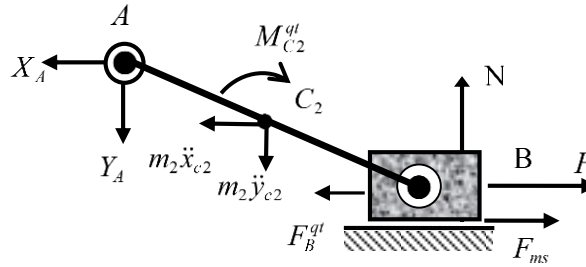
$$Q_1^{qt} = -(m_2 c_2 + m_3 l_2) l_1 \sin q_2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2); \quad (27)$$

$$Q_2^{qt} = (m_2 c_2 + m_3 l_2) l_1 \sin q_2 \dot{q}_1^2$$

Còn phương trình (9) có dạng:

$$f_2 \equiv (l_2 \sin(q_1 + q_2) - l_1 \sin q_1) \ddot{q}_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) \ddot{q}_2 + (l_2 \sin(q_1 + q_2) - l_1 \sin q_1) \dot{q}_1^2 + l_2 \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_2^2 + 2l_2 \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 = 0 \quad (28)$$

Để thiết lập hệ thức xác định lực ma sát ta tách thanh truyền AB và áp dụng phương pháp Tĩnh hình học- Động lực và sử dụng Định luật ma sát Cu lông. Hệ lực quán tính của khâu AB được thu về khối tâm  $C_2$  được một lực và một ngẫu lực (Hình 2).



Hình 2. Mô hình lực tác dụng lên AB

Các lực quán tính và mô men quán tính thu gọn về khối tâm  $C_2$  được tính như sau:

$$\vec{R}_{C_2}^{qt} = -m_2 \vec{a}_{C_2} = -m_2 \ddot{x}_{C_2} \vec{i} - m_2 \ddot{y}_{C_2} \vec{j}; \quad \bar{M}_{C_2}^{qt} = -J_2 \bar{\varepsilon}_2 = -J_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \quad (29)$$

Trong đó:

$$x_{C_2} = l_1 \cos q_1 - c_2 \cos(q_1 + q_2); \quad y_{C_2} = l_1 \sin q_1 - c_2 \sin(q_1 + q_2);$$

$$\dot{x}_{C_2} = (c_2 \sin(q_1 + q_2) - l_1 \sin q_1) \dot{q}_1 + c_2 \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_2;$$

$$\ddot{x}_{C_2} = (c_2 \sin(q_1 + q_2) - l_1 \sin q_1) \ddot{q}_1 + c_2 \sin(q_1 + q_2) \ddot{q}_2 + (c_2 \cos(q_1 + q_2) - l_1 \cos q_1) \dot{q}_1^2 + c_2 \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_2^2 + 2c_2 \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (30)$$

$$\dot{y}_{C_2} = (l_1 \cos q_1 - c_2 \cos(q_1 + q_2)) \dot{q}_1 - c_2 \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_2;$$

$$\ddot{y}_{C_2} = (l_1 \cos q_1 - c_2 \cos(q_1 + q_2)) \ddot{q}_1 - c_2 \cos(q_1 + q_2) \ddot{q}_2 + (c_2 \sin(q_1 + q_2) - l_1 \sin q_1) \dot{q}_1^2 + c_2 \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_2^2 + 2c_2 \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

Phương trình mô men các lực với điểm A:

$$\sum m_A(\vec{F}) = M_{C_2}^{qt} - y_B(F + F_{ms} - m_2\ddot{x}_{C_2} - m_3\ddot{x}_B) + x_B(N - m_3g - m_2\ddot{y}_{C_2}) = 0 \quad (31)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} x_B &= -l_2 \cos(q_1 + q_2); y_B = -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ \dot{x}_B &= (l_2 \sin(q_1 + q_2) - l_1 \sin q_1)\dot{q}_1 + l_2 \sin q_1 \dot{q}_2 = 0 \\ \ddot{x}_B &= (l_2 \sin(q_1 + q_2) - l_1 \sin q_1)\ddot{q}_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)\ddot{q}_2 + (l_2 \cos(q_1 + q_2) - l_1 \cos q_1)\dot{q}_1^2 \\ &\quad + l_2 \cos(q_1 + q_2)\dot{q}_2^2 + 2l_2 \cos(q_1 + q_2)\dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \vec{F}_{ms} &= -f |\vec{N}| \text{signum}(\dot{x}_B); \end{aligned} \quad (32)$$

Các lực quán tính đặt vào con trượt B được tính như sau:

$$\vec{F}_B^{qt} = -m_3 \ddot{x}_B \vec{i} \quad (33)$$

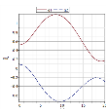
Phương trình (31) có kể đến (29) và (33) có dạng:

$$\begin{aligned} \sum \bar{m}_A(\vec{F}) &= \bar{M}_C^{qt} + \bar{m}_A(\vec{F}_C^{qt}) + \bar{m}_A(\vec{F}_B^{qt}) + \bar{m}_A(\vec{F} + \vec{F}_{ms}) + \bar{m}_A(\vec{N}_A - \vec{P}_3) = -J_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ &- l_2 \sin(q_1 + q_2)(F_{ms} + F) + \left(\frac{F_{ms}}{f} - m_3 g\right) - m_2 c_2 \sin(q_1 + q_2)[(c_2 \sin(q_1 + q_2) - l_1 \sin q_1)\ddot{q}_1 \\ &+ c_2 \sin(q_1 + q_2)\ddot{q}_2 + (l_1 \cos q_1 - c_2 \cos(q_1 + q_2))\dot{q}_1^2 + c_2 \cos(q_1 + q_2)\dot{q}_2^2 + 2c_2 \cos(q_1 + q_2)\dot{q}_1 \dot{q}_2] \\ &+ m_2 c_2 \cos(q_1 + q_2)[(l_1 \cos q_1 - c_2 \cos(q_1 + q_2))\ddot{q}_1 - c_2 \cos(q_1 + q_2)\ddot{q}_2 + (c_2 \cos(q_1 + q_2) - l_1 \sin q_1)\dot{q}_1^2 \\ &+ c_2 \sin(q_1 + q_2)\dot{q}_2^2 + 2 \sin(q_1 + q_2)\dot{q}_1 \dot{q}_2] \end{aligned} \quad (34)$$

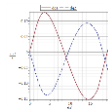
Bằng cách này chuyển động của cơ hệ được xác định từ hệ phương trình (25), (28) và (34). Việc thiết lập phương trình bổ sung (34) có thể nhận được bằng nhiều cách khác nhau.

Kết quả giải bằng số được thực hiện với bộ số liệu:  $J_1 := 15 \text{ kgm}^2$ ,  $J_2 = 0.1 \text{ kgm}^2$ ,  $m_2 = 0.1 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 1.5 \text{ kg}$ ,  $f = .25$ ,  $M = 0.5 \text{ Nm}$ ,  $l_1 = 1 \text{ m}$ ,  $l_2 = 10 \text{ m}$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $F = 5.5 \text{ N}$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $c_2 = 5 \text{ m}$ .

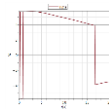
Với điều kiện đầu  $q_1(0) = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ ,  $q_2(0) = 0.0834 \text{ rad}$ ,  $\dot{q}_1(0) = 0.001 \text{ rad/s}$ ,  $\dot{q}_2(0) = -0.001 \text{ rad/s}$ . Thời gian tính toán khoảng 20 s. Đồ thị vị trí  $q_1$  và  $q_2$  được thể hiện trên hình 3. Đồ thị vận tốc góc  $\dot{q}_1$  và  $\dot{q}_2$  được thể hiện trên hình 4 và đồ thị lực ma sát được thể hiện trên hình 5.



Hình 3. Đồ thị vị trí  $q_1$  và  $q_2$



Hình 4. Đồ thị vận tốc góc  $\dot{q}_1$  và  $\dot{q}_2$



Hình 5. Đồ thị lực ma sát Coulong

#### 4. Kết luận

Trong bài báo đã sử dụng dạng phương trình tránh sử dụng các nhân tử Lagrange để khảo sát chuyển động các cơ hệ liên kết [11] cùng với việc kết hợp với định luật ma sát Coulong để khảo sát chuyển động các cơ cấu máy có ma sát. Bài báo đã minh họa cho trường hợp cơ cấu tay quay con trượt có ma sát tại rãnh trượt, tức ma sát ngoài. Tuy nhiên phương pháp đề xuất cũng cho phép khảo sát các cơ cấu máy chịu ma sát trong (ma sát giữa các bộ phận chuyển động của máy).

#### Tài liệu tham khảo

- [1] Abramov B. M., Motion of a rigid body under constraints with friction (tiếng Nga), *Proceeding of the Seminar on Theory of Mechanisms and Machines of the USSR*, vol.2 No 41, pp 16-35, (1951).
- [2] Appell P., Extension des equations de Lagrange au cas du frottement de glissement, *Comptes Rendus. Acad.Sci,Paris*, T.114 p. 331, (1892).
- [3] Rummyantsev.V.V. Về hệ với ma sát (Tiếng Nga), *Tạp chí Toán học và Cơ học Ứng dụng*, Viện Hàn Lâm khoa học Liên Xô, Số 6, (1961).
- [4] Le Xuan Anh, Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction, *Springer*, (2003).
- [5] Đỗ Sanh, Đỗ Đăng Khoa, *Động lực học giải tích*, Nhà xuất bản Bách khoa-Hà Nội, (2017).
- [6] Do Sanh, Xác định các phản lực liên kết (tiếng Nga), *Prikl. Math. Mekh.* No 6, Moscow, (1975).
- [7] Đỗ Sanh, *Chuyển động của các cơ hệ chịu liên kết*, Luận án Tiến sĩ Khoa học, Đại học Bách khoa Hà Nội, (1984).
- [8] Do Sanh, Do Dang Khoa, Applying Principle of Compatibility for Determining Reaction Forces of Constraints, *Machine Dynamics Problems*, Vol. 31, No. 1, 72-81, (2007).
- [9] Do Sanh, Dinh Van Phong, Phan Dang Phong, Do Dang Khoa, Nguyen Cao Thang, Problem of Determining the Reaction Forces of Mechanical Constraints, *Proceedings of the IFToMM, I. International Symposium on Robotics and Mechatronics*, Bach Khoa Publishing, (2009).
- [10] Do Sanh, Dinh Van Phong, Do Dang Khoa, Motion of Mechanical Systems with Non-ideal Constraints, *Vietnam Journal of Mechanics*, Vol. 35, No. 2, (2013).
- [11] Do Sanh, Dinh Van Phong, Do Dang Khoa, Tran Duc, A Method for Solving the Motion of Constrained Systems, *In Proceedings of the 16<sup>th</sup> Asian Pacific Vibration Conference*, Hanoi, Vietnam, (2015).